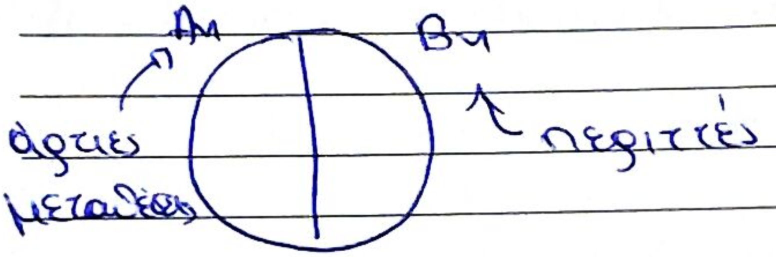
Ορισμός: Αντιμετάθεση είναι ένας κύκλος μήκους 2 (i,j)

Οποιαδήποτε μετάθεση σ του S_n γράφεται ως γινόμενο αντιμεταθέσεων

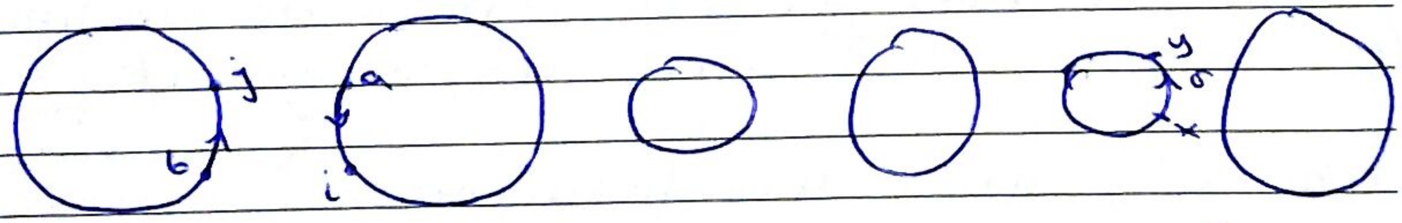
$\sigma = (1,3,5,7,11)(2,4,6)(8,9,10) = (1,11)(1,7)(1,5)(1,3)(2,6)(2,4)(8,10)(8,9)$



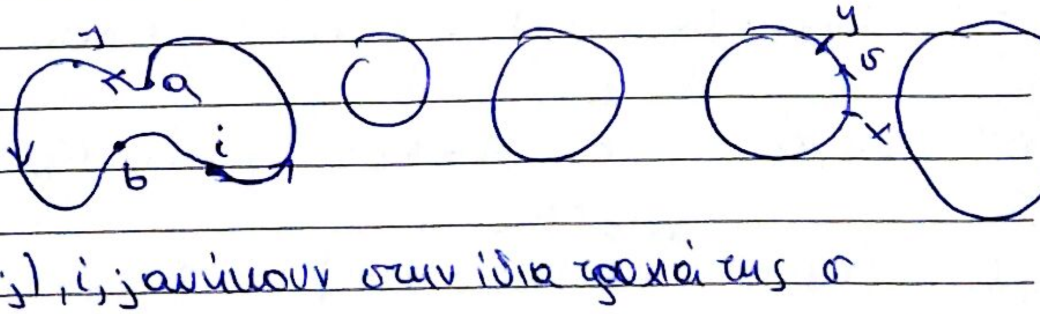
Πρόταση: Έστω $\sigma \in S_n$ και $\tau = (i,j)$ είναι μία αντιμετάθεση. Το πλήθος των τροχιών της σ και το πλήθος των τροχιών της $\tau\sigma$ διαφέρουν κατά 1

1η περίπτωση: $\tau = (i,j)$ i,j ανήκουν σε διαφορετικές τροχιές της σ

$\sigma =$

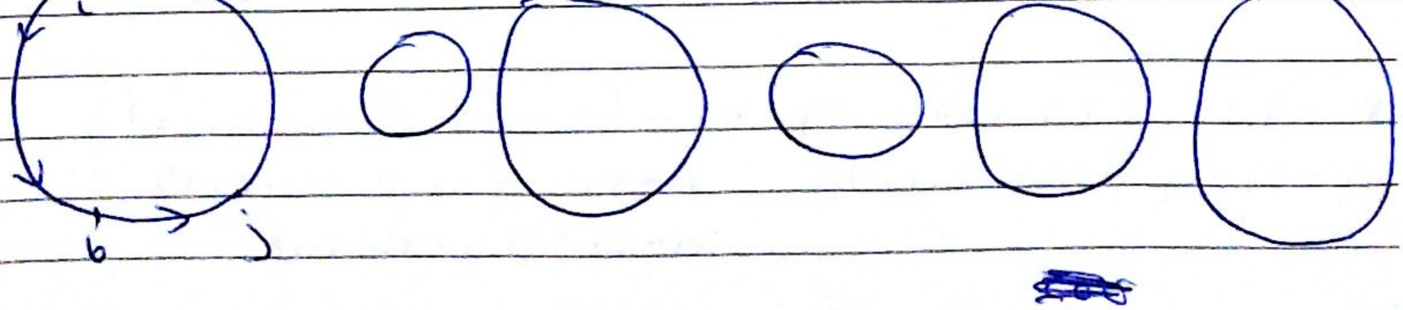


$\tau\sigma = (i,j)\sigma =$

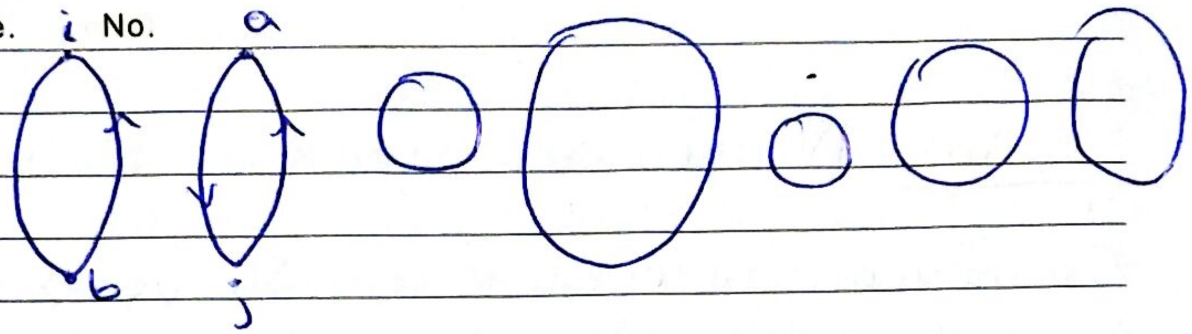


2η περίπτωση: $\tau = (i,j)$, i,j ανήκουν στην ίδια τροχιά της σ

$\sigma =$



Date. No.

$\tau\sigma = (i,j)\sigma =$ 

Θεώρημα: Έστω σ μετάθεση του S_n και r_σ το πλήθος των τροχιών της σ. Έστω ότι: $\sigma = \tau_s \tau_{s-1} \dots \tau_1$ είναι γινόμενο s αντιμεταθέσεων τότε:

$$n - r_\sigma \equiv s \bmod 2$$

Απόδειξη: Επαγωγή στο s

- $\underline{s=1}$ $\quad \sigma = \underbrace{\tau_1 = (i,j)}_{\text{αντιμετάθεση}}$ το πλήθος των τροχιών της σ είναι:

$r_\sigma = n-1$ $\qquad n - r_\sigma = n-(n-1) = 1$ και
$1 \equiv 1 \bmod 2$

Για $s=1$ ισχύει ✓

- Έστω ότι ισχύει για $s=k$ δηλαδή αν μία μετάθεση ($\sigma = \tau_k \tau_{k-1} \dots \tau_1$) τότε: $n - r_\sigma \equiv k \bmod 2$ σ είναι γινόμενο k μεταθέσεων ισχύει

Έστω σ' γινόμενο $k+1$ μεταθέσεων
$\sigma' = \tau_{k+1}(\tau_k \dots \tau_1) = \tau_{k+1}\sigma''$ όπου: $\sigma'' = \tau_k \tau_{k-1} \dots \tau_1$

$\sigma'' = \tau_k \cdot \tau_{k-1} \dots \tau_1 \quad n - r_{\sigma''} \equiv k \bmod 2$

$\sigma' = \tau_{k+1}\sigma'' \overset{\text{προηγ. θεωρ.}}{\Longrightarrow} |r_{\sigma'} - r_{\sigma''}| = 1 \Rightarrow r_{\sigma'} - r_{\sigma''} = \pm 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow r_{\sigma''} = r_{\sigma'} \pm 1$

$n - r_{\sigma''} \equiv k \bmod 2 \Rightarrow n - (r_{\sigma'} \pm 1) \equiv k \bmod 2$
$n - r_{\sigma''} \mp 1 \equiv k \bmod 2 \qquad n - r_{\sigma'} \equiv k \pm 1 \bmod 2$
$n - r_{\sigma'} \equiv k+1 \bmod 2$

$\boxed{n - r_\sigma \equiv s \bmod 2}$

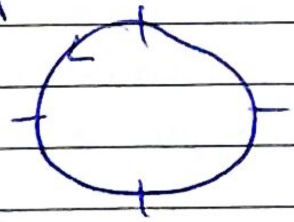
$\sigma = \tau_s \tau_{s-1} \dots \tau_1$: γινόμενο αντιμεταθέσεων

"Ορισμός": Μία μετάθεση $\sigma \in S_n$ λέγεται άρτια αν $n - r_s$ άρτιος ($n - r_s \equiv 0 \bmod 2$)

"Ορισμός": Μία μετάθεση $\sigma \in S_n$ λέγεται περιττή αν $n - r_s$ περιττός

$S_4 = \{ I, (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4), (1,2,3), (1,3,2), (1,2,4), (1,4,2), (1,3,4), (1,4,3), (2,3,4), (2,4,3), (1,2,3,4), (1,2,4,3), (1,3,2,4), (1,3,4,2), (1,4,2,3), (1,4,3,2), (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3) \}$

$|S_4| = 24$



$A_4 = \{ I, (1,2,3), (1,3,2), (1,2,4), (1,4,2), (1,3,4), (1,4,3), (2,3,4), (2,4,3), (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3) \}$

↑ άρτιες μεταθέσεις

$B_4 = \{ (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4), (1,2,3,4), (1,2,4,3), (1,3,2,4), (1,3,4,2), (1,4,2,3), (1,4,3,2) \}$: Δεν είναι υποομάδα της S_4

↑ περιττές μεταθέσεις

Date. No.

Θεώρημα: Το σύνολο A_n, των άρτιων μεταθέσεων του S_n είναι υποομάδα του S_n

i) Έστω $\sigma_1, \sigma_2 \in A_n$. $\sigma_1 = \tau_1\tau_2 \ldots \tau_{2k}$, τ_i: αντιμετάθεση
$\sigma_2 = \mu_1\mu_2 \ldots \mu_{2\lambda}$, μ_i: -//-

$\sigma_1\sigma_2 = (\tau_1\tau_2 \ldots \tau_{2k})(\mu_1\mu_2 \ldots \mu_{2\lambda}) = \underbrace{\tau_1\tau_2 \ldots \tau_{2k}\mu_1\mu_2 \ldots \mu_{2\lambda}}_{2(k+\lambda) \text{ αντιμεταθέσεις}} \in A_n$

A_n: κλειστό ως προς την πράξη

ii) $I = (1,2)(1,2) \in A_n$

iii) Έστω $\sigma \in A_n \Rightarrow \sigma = \tau_1\tau_2 \ldots \tau_{2n-1}\tau_{2n}$: γινόμενο άρτιου πλήθους αντιμεταθέσεων ~~$\Rightarrow \sigma^{-1} \in A_n$~~

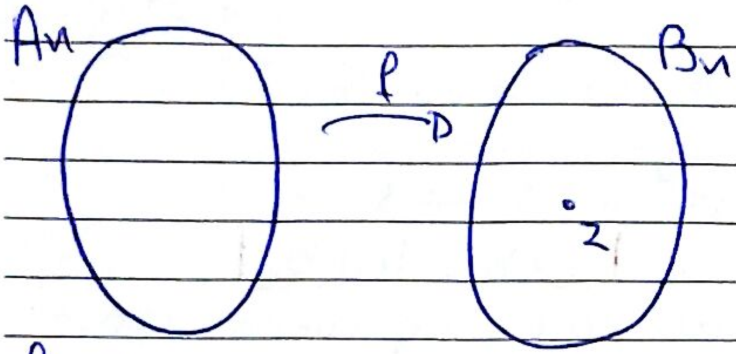
Ισχυριζόμαστε: $\sigma^{-1} = \underbrace{\tau_{2k}\tau_{2n-1} \ldots \tau_2\tau_1}_{2n\text{-αντιμεταθέσεις}} \in A_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma^{-1} \in A_n$

$\tau_1\tau_2 \ldots \tau_{2n-1}(\tau_{2n}\ \tau_{2n})\tau_{2n-1} \ldots \tau_2\tau_1) =$
$= \tau_1\tau_2 \ldots \tau_{2n} = I$

Ορισμός: Η ομάδα A_n ονομάζεται εναλλάσσουσα υποομάδα της S_n

Date. No.



Έστω τ αντιμετάθεση του S_n

$f_\tau(\sigma)=\tau\sigma$

Αν $\sigma\in A_n \Rightarrow f_\tau(\sigma)=\tau\sigma=\underbrace{\tau\,\tau_1\tau_2\ldots\tau_{2n}}_{2n+1 \text{ αντιμεταθέσεις}}\in B_n$

$\sigma=\tau_1\tau_2\ldots\tau_{2n}$

$f_\tau(a)=f_\tau(b)\Rightarrow \tau a=\tau b \Rightarrow a=b$ $\quad \underline{f_\tau = 1-1}$

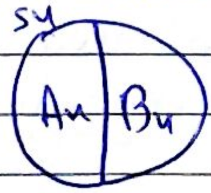
$a,b\in A_n$

Έστω $z\in B_n \Rightarrow z=\tau_1\tau_2\ldots\tau_{2n+1}$

$f_\tau(\underbrace{\tau\tau_1\tau_2\ldots\tau_{2n+1}}_{2n+2 \text{ μεταθέσεις}})=(\tau\tau)\tau_1\ldots\tau_{2n+1})=\tau_1\ldots\tau_{2n+1}=z$

Άρα $\underline{f_\tau = \text{επί}}$

Άρα τα δύο σύνολα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων



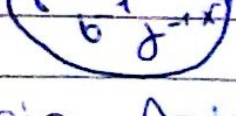
$|A_n|=\dfrac{n!}{2}$

Φυλ. 1 (3) G πεπερασμένη ομάδα με άρτιο πλήθος στοιχείων. Δείξτε ότι $\exists\, a\in G$ με $a*a=e, a\neq e$

Λύση:

Έστω ότι δεν υπάρχει. Για κάθε $a\in G$, $a\neq e$ το $a^{-1}\neq a$

(Έστω όχι, τότε υπάρχει $a\in G$ τ.ω $a^{-1}=a \Rightarrow a^{-1}*a=e \Rightarrow a*a=e$ Άτοπο)



$G=\{e\}\cup\left(\bigcup_{\substack{a\in G\\ a\neq e}}\{a,a^{-1}\}\right)$ ← $2n+1$ στοιχεία Άτοπο, αφού η G είχε άρτιο πλήθος στοιχείων